3.4 力とポテンシャルの関係

式(3-2-1)においてポテンシャルの定義をした。もう一度、以下に示す。

$$U(A) \equiv -\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

この式は、保存力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$を任意の経路に沿って基準点0からA点まで線積分したものである。なので、A点を変えつつ、全ての空間の点でのポテンシャルを計算すれば**ポテンシャルのスカラー場** $U(\mathbf{r})$ が決まる事になる。すなわち、保存力のベクトル場を、対応するポテンシャルのスカラー場で記述しても全く数学的に同等であると言える[1]。

では、逆に、先にポテンシャルの場が与えられた時、それからどのようにして対応する力の場を求めたら良いであろうか？ 式(3-4-1)は積分で与えられているので、力の場はポテンシャルの微分操作によって求まる事になる。本節では、この求め方について述べる。

3-4-1 1次元の場合

位置ベクトル $\mathbf{r}$ にあるA点と、A点から変位ベクトル $\Delta\mathbf{r}$ の位置 $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ にあるB点を考えてみよう。

その時、B点のポテンシャル$U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$とA点のポテンシャル$U(\mathbf{r})$の差は式(3-2-2)より、

$$\Delta U \equiv U(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = -\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

と書ける。ここで、A点とB点の距離が無限小の極限を考えると（$\Delta\mathbf{r}$ を $d\mathbf{r}$ と置く）、 $d\mathbf{r}$ の間に$\mathbf{F}(\mathbf{r})$は変化しないから式(3-4-2)の右辺の積分は単に $-\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ と書ける。これを、直交座標での成分で書いてみると、

$$dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z) = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

となる。ただし、無限小の変化なので、ΔU を dU と書いた。

ここで、簡単のため１次元での場合を考えよう。この時、A点もB点もx軸上にあり、A点の座標をxとすると、B点の座標は x+dx である。また、力もx成分 (F_x)以外は無い。
すると、(3-4-3)式は、

$$dU = U(x+dx) - U(x) = -F_x dx \qquad (3\text{-}4\text{-}4)$$

と書ける。

[1] p.25の注3を見よ

一方、B点のポテンシャル $U(x+\Delta x)$ は、A点のポテンシャル $U(x)$とその点での$U(x)$の x 微分（導関数）を使って、次のように数学的にTaylor 展開[2]で表すことができる。

$$U(x+\Delta x) = U(x) + \frac{dU(x)}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2U(x)}{dx^2}(\Delta x)^2 + \dots . \qquad \text{(3-4-5)}$$

しかし、２階以上の微分を含む高次の項は、$(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, ⋯ のように、どんどん小さくなっていくので、今考えている無限小の極限の場合には１次の項までで、

$$dU = U(x+dx) - U(x) = \frac{dU(x)}{dx}dx \qquad \text{(3-4-6)}$$

となる。この数学的に求めた式(3-4-6)と、ポテンシャルの定義から上で求めた(3-4-4)式、

$$dU = U(x+dx) - U(x) = -F_x dx \qquad \text{(3-4-4 再掲)}$$

は同じ値になっていなければならない。そこで、両式の右辺を等しいと置き、

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad \text{(3-4-7)}$$

が得られる。ただし、F_x を $F(x)$ と書いた。

式(3-4-7)を見ると、ポテンシャルを x で微分したもの（更に、−１をかけたもの）が力となっている。こうして、ポテンシャルの場を微分すれば力の場が得られるのであるから、ある力学的な系を記述するのに、我々は、力の場を使っても良いし、ポテンシャルの場を使っても良い。これらは数学的に同等であることがわかった[3]。

ここで、例として、１次元の調和振動子の場合、実際にその関係が成り立っているか見てみよう。すでに(3-2-7)式で求めたように、１次元の調和振動子のポテンシャルは

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(3-4-8)}$$

である（ここで、k はバネ定数）。

---

2 関数 f(x)のxでの値は、xの近傍の点 x_0でのf(x_0)とその点での微係数を使って、 $f(x)=f(x_0)+(1/1!)f'(x_0)(x-x_0)+(1/2!)f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+(1/n!)f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$ のように書ける。ここで、$f^{(n)}$はf(x)のxでのn階微分である。この式で、x を x+dx , x_0 を x と置き、f(x)をU(x)と書けば、(3-4-5)式が得られる。Taylor 展開についての詳細は数学の解析の教科書か、物理数学の教科書で復習せよ。

3 力の場はベクトル場なのに対してポテンシャルの場はスカラー場である。スカラー場では各点で大きさのみ決まるのでベクトル場より取り扱うのが楽である。電磁気学では、静電場(E)と静電ポテンシャル（ϕ）の関係が、(3-4-7)と同等の式で表される(F を E に、Uをϕと置き換える）。３次元の静電場の問題は、対応するポテンシャルで解いておいて、必要に応じて、(3-4-7)式の３次元版の式（後述）から電場のベクトルの分布を求める方が楽である。なお、解析力学や量子力学では、ポテンシャルで力学系を記述するのが普通である。

式(3-4-7)に、このポテンシャル(3-4-8)式を代入すると、

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -kx \qquad (3\text{-}4\text{-}9)$$

となり、確かに復元力の表式が得られた。

式(3-4-8)を図に書いてみると式(3-4-9)の幾何学的意味がわかってくる。すなわち、式(3-4-8)は放物線になっているが、式(3-4-9)はその曲線の傾き（に−１をかけたもの）になっている。例えば、原点は放物線の最小値になっていてその微分はゼロの点である。この点では力がゼロになる（実際、つり合いの位置なので力はゼロ）。原点から離れるにつれ放物線の傾きは急になっていく。これは、力が原点から遠ざかるほど大きくなることに相当している。ただし、(3-4-9)式にはマイナスがついているので、力の向きは常に原点方向を向いていて復元力であることを表している。定量的には、その傾き（微分値）は常に kx となってフックの法則 ($F = -kx$) が満たされている。[4]

3-4-2 数学的準備（多変数の関数の微分）＜復習＞

続いて、３次元での場合を考えよう。基本的な考え方は同じであるがポテンシャルは多変数（今の場合は x, y, z の３変数）の関数 $U(x, y, z)$ になるので、(3-4-7)式に対応するものは、「偏微分」で表される。そこで、ここでは、その数学的準備として、偏微分(partial derivative)と全微分(total derivative) について、ごく簡単に復習しておこう[5]。

3-4-2-1 偏微分

自然界の様々な物理量（を表す関数）は、一つの要因（変数）で決まることは稀で、多くの場合、たくさんの要因（変数）で決まるであろう。これを、$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ のように書く。ここで、f は、その物理量を表し、$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ はその要因（変数）である（今、n個の変数からなるとし、x の添え字にその番号をつけて表した）。すなわち、f は$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ の関数になっている。

さて、ここで、f が変化する要因はn個あるのだが、そのうち、i 番目の要因 x_i がどのくらい f の変化に寄与するか知りたい（すなわち、x_i だけの影響を見たい）としよう。それを調べる方法の一つは、<u>他の要因は全て固定しておいて、そのx_i のみを変化させた時の f の変化率</u>を調べることである。これを、「f の x_i に関する偏微分」といい、次のように定義される。

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \equiv \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, \mathbf{x_i} + \mathbf{\Delta x_i}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, x_n)}{\Delta x_i} \qquad (3\text{-}4\text{-}10)$$

一変数での微分の定義、

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3\text{-}4\text{-}11)$$

と比較してみれば、その違いはよくわかるだろう。式(3-4-10)において、変化させているのは x_i の変数のみである。偏微分の「読み方」は、式(3-4-10)の場合「ラウンド f ラウンドx_i」とか「デルf デル x_i 」とか言うことが多い。

今、３次元でのポテンシャルを扱うのだが、$U(x_1, x_2, x_3)$ と書いても良いが、通常の書き方である $U(x, y, z)$ とした時、そのx, y, z に対する偏微分は、

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \qquad (3\text{-}4\text{-}12)$$

のように記す。ただし、分子の$U(x, y, z)$ の表記は煩雑なので誤解が生じない場合、 単にU とだけ書いても良い。

---

[4] ポテンシャルが放物線からずれた曲線だったらどうなるであろうか？ 後の節で議論するがここで考えて見て欲しい。

[5] 厳密な議論や詳細は数学（解析）の教科書や物理数学の教科書を参照のこと

3-4-2-2 全微分

次に、$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ において、全ての変数が変化した場合、f はどう変化するか、について見てみる。今、全ての変数を微小量(それぞれ $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$)動かしたとしよう。この時、全体の変化 Δf は、

$$\Delta f \equiv f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + \ldots \quad \text{(3-4-13)}$$

と書ける。これは、多変数のTaylor 展開と呼ばれる（式(3-4-5)と比較せよ）。もちろん、２次以上の項も、ずっと続いているのであるが、ここでは書くのを省いた。（例えば、２次の項には、$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\Delta x_i)^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j$ のような項が現れる。後者の２次の偏微分はf を x_j で偏微分してから $x_i\ (i \neq j)$ で偏微分する、と言う意味である。）

さて、(3-4-13)式において、全ての変数の変化量を無限小にする極限を取ったとすると (3-4-13)式の右辺の高次の項は全て無視でき、この時の f の変化 dfは、

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \qquad \text{(3-4-14)}$$

と書ける。これをみると、全体の変化は、「それぞれの変数が独立に変化した時の寄与（変化率 × 変数の変化量）を全て足し合わせたもの」と解釈できる。このdf を「全微分」と言う。このような全微分が可能な条件、すなわち、「**f が局所的に線形近似(変数の１次式で近似）できる**」条件についての詳細は、数学（解析）や物理数学の教科書をみよ。

3-4-3　３次元の場合

さて、全微分の表式(3-4-14)を３次元のポテンシャル $U(x, y, z)$ の変化の場合について適応すると、

$$dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad \text{(3-4-15)}$$

と書ける。この数学的に求めた式(3-4-15)と、ポテンシャルの定義から最初に求めた(3-4-3)式、

$$dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z) = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \qquad \text{(3-4-3、再掲)}$$

を比べてみよう。両式の右辺は同じ値になっていなければならないことから、

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x},\ \ F_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y},\ \ F_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \qquad \text{(3-4-16)}$$

の関係式が得られる。

この式は１次元の場合の(3-4-7)式に相当している。

３次元の場合では、ポテンシャルを、それぞれの変数で偏微分する[6]ことにより、力のその方向の成分が求まることがわかる。力の各成分が決まれば、力のベクトルが求まったことになるので、結局、１次元の場合と同様、ポテンシャル場（スカラー場）の微分によって力のベクトル場が求まることになる。

---

[6] −１をさらにかける

ここで、例として、どの空間方向に引っ張ってもバネ定数は共通であるような調和振動子（等方的な３次元調和振動子と呼ぶ）[7]の場合に上の関係が成り立っているか見てみよう。この場合のポテンシャルを仮に、

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k\,\mathbf{r}^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (3\text{-}4\text{-}17)$$

の様に置いてみる。ここで k はバネ定数。(3-4-16)式を計算すると、

$$F_x = -\,kx,\ \ F_y = -\,-\,ky,\ \ F_z = -\,kz \qquad (3\text{-}4\text{-}18)$$

が得られる。この結果はまとめて $\mathbf{F} = -\,k\mathbf{r}$ と書けるので、これは確かに等方的な３次元の調和振動子の復元力の場を表している[8]。逆に、$\mathbf{F} = -\,k\mathbf{r}$ から出発し、(3-4-1)式を直接計算して(3-4-17)式になる事を示せる（演習）。

3-4-4　ベクトル解析の演算子を使った表式

ここで、３次元でのポテンシャルと力の関係(3-4-16)式をベクトル解析の演算子（勾配）を使って書き表しておこう。

式(3-4-16)をベクトルの形でまとめて書くと、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x, F_y, F_z) = -\left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}19)$$

となる。ここで、上に出てくるカッコの中の「偏微分演算子」のみを成分とし、一見、ベクトルの形を取った演算子 (operator)、

$$\mathrm{grad} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}20)$$

(grad は ∇ と書いても良い)

を考える。「grad」それだけでは本当のベクトルではないし意味のあるものではない[9]が、スカラー関数（今の場合だとポテンシャル関数）に作用することで、それぞれの偏微分を成分とする一つのベクトルを作り上げる。この演算子を**勾配**(gradient)と呼ぶ。grad （グラッド、グラディエント（実際の英語発音はグレイディエントが近い））は ∇ （nabla, ナブラと呼ぶ）と書く事も多い。この講義では、grad を使うが、必要に応じて両者を併記する。

この演算子を使うと $\mathrm{grad}\ U$ は

$$\mathrm{grad}\ U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}21)$$

と書けるので、式(3-4-19)は、シンプルに次のように表記できる。

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\ U \quad （あるいは、\ \mathbf{F} = -\,\nabla\,U\ ） \qquad (3\text{-}4\text{-}2２)$$

（注意）勾配演算子(grad)はスカラー関数に作用するが、その結果はベクトルになる。今の場合（(3-4-2２)式の場合）はスカラー関数であるポテンシャル関数 U に作用してベクトルである力 $\mathbf{F}$ を得ている。

---

7 演習２及びその解答例を参照

8 等方的な３次元の調和振動子のポテンシャルの図を書いてその曲面の傾きを調べ、力との関係を１次元調和振動子の場合と同じように幾何学的に考察して見よ。

9 通常の微分演算子 d/dx などもそれ自身では意味がない。df(x)/dx のように何か関数に作用して「その関数を微分した関数」と言う意味を持つようになる。物理では、このような何かに作用するものを「演算子」とか「作用素」と言う。

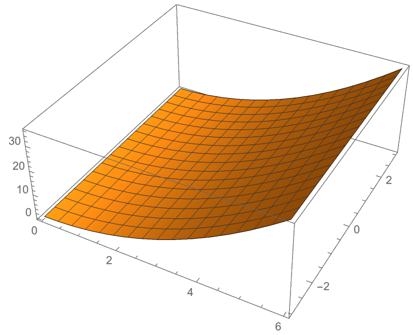
3-1-1節において、保存力の場は経路によらず仕事が決まるため一周積分が常にゼロになる事、これは「渦なし場」と呼ばれる事、を述べた。なので、**もっと一般的に、渦無し場ではポテンシャルが定義でき、ポテンシャルと渦なし場の関係は(3-4-22)式のように表される**、と言える。

（参考）本講義では説明しないが、ベクトル解析では一周積分がゼロになる事（渦なし場である事）を微分の形式で $\mathbf{rot}\ \mathbf{F} = 0$, $(or\ \nabla \times \mathbf{F} = 0)$ と書く事ができる。実際、この式に、(3-4-22)式を代入すると、$\mathbf{rot}\ \mathbf{F} = \mathbf{rot}\ (-\mathrm{grad}\ U)$ となるが、$\mathbf{rot}\ (\mathrm{grad}) = 0$ は恒等的に０となるので、$\mathbf{rot}\ \mathbf{F} = 0$ を満たしている事がわかる。（静電場の場合にも同様な事が出てくる。）

3-4-5 ポテンシャルと力の場の幾何学的関係（２次元の場合の例題）

すでに、3-4-1節の最後のところで、１次元の調和振動子の場合のポテンシャルと力の幾何学的な関係について簡単にふれたが、ここでは、２次元のポテンシャルを例にとって、力の場との関係を視覚的に調べてみよう。この例題から、**勾配ベクトルはポテンシャルの最急斜面を登る方向を向いており、力のベクトルはポテンシャルの最急降下面を下り落ちる方向を向いている**ことがわかる。

[例題]



右の図のような２次元ポテンシャル$U(x, y) = x^2\ (x \geq 0)$が与えられたとする（横方向がx、奥行きがy、上方向がU）。xを固定し、y方向に進んでもポテンシャルの値は変わらず一定である。一方、yを 固定し、xを増やすとポテンシャルはxの２乗で増加する。対応する力の場を求め、スケッチしなさい。

[解答例]

２次元の場合、ポテンシャルと力の場の関係は、

$$\mathbf{F}(x, y) = -\ \mathrm{grad}\ U(x, y) = -\left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}23)$$

となる。xを固定し、yを変化せてもUは変化しないから、

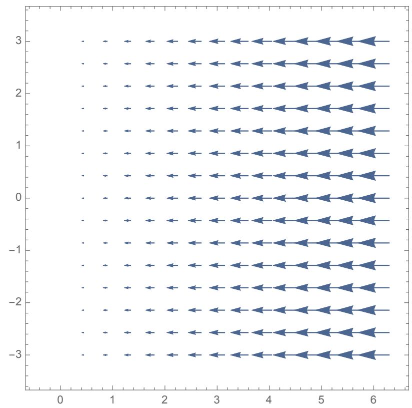
$\dfrac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0$ である。一方、yを固定し、xを正の範囲で変化させた場合は、$\dfrac{\partial}{\partial x}U(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x > 0$ となる。よって、勾配ベクトルは

$$\mathrm{grad}\ U(x, y) = (2x, 0) \qquad (3\text{-}4\text{-}24)$$

となり、力の場はこれに−１をかけて、

$$\mathbf{F}(x, y) = -\ \mathrm{grad}\ U(x, y) = (-2x, 0) \qquad (3\text{-}4\text{-}25)$$

が得られる。



これを図示すると、右図のようになる（横方向がx、縦方向がy）。ポテンシャルの図と比較してみよう。まず、ポテンシャル関数は y方向には平らなので、y方向には力の成分はないことがわかる。x方向にはちょうど１次元の調和振動子と同じ形のポテンシャルの変化になっているので、原点では傾きがゼロで力もゼロ、xが増えるにつれてポテンシャル面の傾きが増すので、力のx成分の大きさも増加する（xに比例して）。得られた勾配ベクトルに−１をかけた（つまり、最急降下面を下り落ちる方向の）ベクトルが力の場を表している事になる。

(参考）上の２つの図と(3-4-24)式を計算するMathematica のコードを以下に示す。（実際に入力するのは、各行の太文字の部分である）

In[1]:=**u[x_,y_]=x^2**
In[2]:=**Plot3D[u[x,y],{x,0,6},{y,-3,3}]**
In[3]:=**gradu[x_,y_]=D[u[x,y],{{x,y}}]**
In[4]:=**f=VectorPlot[-gradu[x,y],{x,0,6},{y,-3,3}]**

注）このコードは少し変えるだけで演習５の2にも適用可能である。

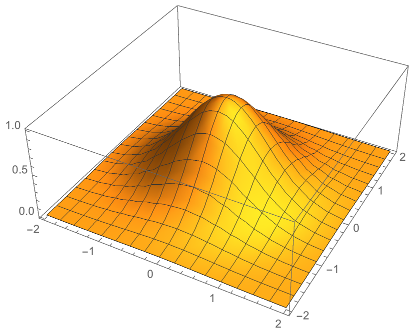
演習5

1. 等方的な３次元調和振動子の復原力は $\mathbf{F}=-k\,\mathbf{r}$ と書ける。このとき、ポテンシャルは

$$U(r)=\frac{1}{2}k\,\mathbf{r}^2=\frac{1}{2}k\,(x^2+y^2+z^2)$$

となる事を、演習４の(3-3-15)式から出発して求めよ。（$\mathbf{F}=-k\,\mathbf{r}$ は中心力である事に注意）。

2. 右の図のような２次元ポテンシャル$U(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}=e^{-\mathbf{r}^2}$ が与えられたとする。



(1) 対応する力の場、

$$\mathbf{F}(x,y)=-\,\mathrm{grad}\;U(x,y)=-\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right) \qquad \text{(3-4-26)}$$

を求め、その概略をスケッチしなさい。

(2) ポテンシャルの曲面の傾きを調べ、力との関係を幾何学的に考察しなさい。

（図のポテンシャル面の等高線（ポテンシャルの値がある一定の大きさになる所を描いた等ポテンシャル線で、ポテンシャルのある大きさ間隔で書いたもの）をスケッチし、<u>力のベクトルは常に等ポテンシャル線に垂直</u>である事を確かめよ。）

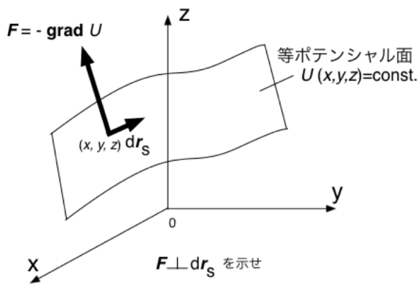
３. 万有引力のポテンシャル式(3-2-13)は、直交座標では$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ なので、

$$U(x,y,z)=-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{(3-4-27)}$$

と書ける。この時、$\mathbf{F}(x,y,z)=-\,\mathrm{grad}\;U(x,y,z)=-\left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$を直接計算して、　$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ となることを示しなさい。[10]

４. 等ポテンシャル面、$U(x,y,z)=$ 一定[11] 、の上にある点 (x,y,z) から<u>面上にそって動く</u>微小なベクトル $d\mathbf{r}_s$と、その点での力のベクトル、$\mathbf{F}(x,y,z)=-\,\mathrm{grad}\;U(x,y,z)$、は垂直であることを示しなさい。これは、<u>力は常に等ポテンシャル面に垂直の方向を向いている</u>ことを意味する。

（注）問題２の(2)では、この結論の２次元での場合の例を示している。



[10] 直交座標ではなく極座標でのgradを使えばFはすぐに求まる（演習7参照）。ここでは、微分演算の練習を兼ねた。

[11] 二次元の場合、U(x,y)=一定になる点(x,y)はxy面内の「曲線」上にある。三次元の場合、U(x,y,z)=一定になる点はxyz空間内の「面」上にある。例えば、二次元調和振動子の場合、U(x,y)=k/2(x²+y²)=一定となる点(x,y,z)は円の上にある。三次元調和振動子の場合、U(x,y)=k/2(x²+y²+z²)=一定となる点は球面の上にある。